ある微分方程式を満たすモジュラー形式について (解析的整数論とその周辺)

金子, 昌信

数理解析研究所講究録 1384 巻 2004 年 50-56

ある微分方程式を満たすモジュラー形式について

九州大学大学院数理学研究院 金子昌信 (Masanobu Kaneko)
Faculty of Mathematics, Kyushu University

導入 複素上半平面 $\mathfrak{H}=\{\tau\in\mathbf{C}\mid\mathrm{Im}(\tau)>0\}$ 上の，k をパラメーターとするある特別な二階の微分方程式

$$f''(\tau)+\star(k+1)f'(\tau)+\star\star\, k(k+1)f(\tau)=0$$

を考える．係数の $\star$, $\star\star$ のところにはある特定の，k には依存しない関数が入るが具体形は今は略す．この k をある整数値，半整数値に特殊化した方程式はその k を重さとするモジュラー形式の解を持って，その解が整数論的に面白そうなものである，というような研究を [7], [5], [6] などで行った．

今回の話では k を 5 分の整数 $(\in\frac{1}{5}\mathbf{Z})$ とする．するとそこに Klein や Ramanujan 以来の由緒ある関数が解として現れて，これまた何やら面白そうである，というのが大体のお話である．本論に入る前に，その由緒ある関数を導入し，Ramanujan の公式などを眺めてみよう．

次の二つの基本となるモジュラー形式を用意する．

$$\begin{aligned}\phi_1=\phi_1(\tau) &= \frac{1}{\eta(\tau)^{3/5}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}(-1)^n q^{(10n+1)^2/40}\\ &= 1+\frac{3}{5}q+\frac{2}{25}q^2-\frac{28}{125}q^3+\frac{264}{625}q^4+\frac{532}{15625}q^5+\cdots,\\ \phi_2=\phi_2(\tau) &= \frac{1}{\eta(\tau)^{3/5}}\sum_{n\in\mathbf{Z}}(-1)^n q^{(10n+3)^2/40}\\ &= q^{1/5}\left(1-\frac{2}{5}q+\frac{12}{25}q^2+\frac{37}{125}q^3-\frac{171}{625}q^4-\frac{3318}{15625}q^5+\cdots\right).\end{aligned}$$

ここで $\eta(\tau)=q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ は Dedekind のエータ関数，$q=e^{2\pi i\tau}$. 多分 Klein の正二十面体群にまつわる研究で初めて登場したこれらの関数は (適当な multiplier system の下) 主合同部分群 $\Gamma(5)$ に関する重さ 1/5 のモジュラー形式である．この multiplier system での $\Gamma(5)$ の重さ $\frac{1}{5}\mathbf{Z}_{\geq 0}$ の正則モジュラー形式のなす環は多項式環 $\mathbf{C}[\phi_1,\phi_2]$ となる (これらの詳細については T. Ibukiyama [3] を参照).

ϕ_1, ϕ_2 を $\eta(\tau)^{2/5}$ で割ったもの (重さ 0) が Rogers-Ramanujan の恒等式で有名な無限積で表わされる：

$$
\begin{aligned}
\frac{\phi_1(\tau)}{\eta(\tau)^{2/5}} &= q^{-1/60}\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n+1})(1-q^{5n+4})} \\
&= q^{-1/60}\left(1+\frac{q^{1^2}}{1-q}+\frac{q^{2^2}}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{q^{3^3}}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\cdots\right), \\
\frac{\phi_2(\tau)}{\eta(\tau)^{2/5}} &= q^{11/60}\prod_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5n+2})(1-q^{5n+3})} \\
&= q^{11/60}\left(1+\frac{q^{1\cdot 2}}{1-q}+\frac{q^{2\cdot 3}}{(1-q)(1-q^2)}+\frac{q^{3\cdot 4}}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\cdots\right).
\end{aligned}
$$

それぞれ第二の等号が Rojers-Ramanujan の等式と呼ばれるもので，数学，数理物理の広範な分野に現れることでよく知られる．また比 ϕ_2/ϕ_1 の次の連分数展開は非常に美しい．

$$
\frac{\phi_2}{\phi_1}(\tau) = q^{1/5}\cdot\cfrac{1}{1+\cfrac{q}{1+\cfrac{q^2}{1+\cfrac{q^3}{1+\cfrac{q^4}{1+\ddots}}}}}
$$

ちなみに，右辺で $q=1$ とすると黄金比 (の逆数) になるが，これはモジュラー関数 ϕ_2/ϕ_1 の尖点 $\tau=0$ での値である．これは q-展開

$$
\frac{\phi_2}{\phi_1}(\tau) = q^{1/5}(1-q+q^2-q^4+q^5-q^6+q^7-q^9+2q^{10}-3q^{11}+\cdots)
$$

を見ているだけでは分からないことで，一寸面白い．

Ramanujan は Hardy に宛てた最初の手紙の中にこの連分数に関する次のような等式を書きしたためて Hardy を「打ちのめして」いる．まず

$$
v=\frac{\phi_2}{\phi_1}(\tau),\quad u=\frac{\phi_2}{\phi_1}(5\tau)
$$

とおくとき (u は v の連分数で q を q^5 にしたもの，Ramanujan の u, v の定義は連分数で，ϕ_1, ϕ_2 の比としてではない)

$$
v^5 = u\,\frac{1-2u+4u^2-3u^3+u^4}{1+3u+4u^2+2u^3+u^4}. \tag{1.10}
$$

(式番号は [2] に同じ.) また,

$$\frac{\phi_2}{\phi_1}(\sqrt{-1}) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \tag{1.11}$$

$$\frac{\phi_2}{\phi_1}(\sqrt{-5}) = \frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[5]{5^{3/4}(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{5/2}-1}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}. \tag{1.12}$$

現代的な言葉で言うと (1.10) はモジュラー関数 ϕ_2/ϕ_1 についてのレベル 5 のモジュラー方程式, (1.11), (1.12) は虚数乗法点での値すなわち singular moduli である. Hardy の言を引いてみよう ([2], p.9).

> "..., but (1.10)–(1.12) defeated me completely; I had never seen anything in the least like them before. A single look at them is enough to show that they could only be written down by a mathematician of the highest class. They must be true because, if they were not true, no one would have had the imagination to invent them. "

本題 前置きはこのくらいにして本論に入る. 以下で微分記号 $'$ は便宜上 $2\pi i$ で割った $\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{d\tau}$ を表すものと約束する. $E_2(\tau)$ を $SL_2(\mathbf{Z})$ に関する「重さ 2 の Eisenstein 級数」,

$$E_2(\tau) = 24\eta'(\tau)/\eta(\tau) = 1 - 24\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{d|n} d)q^n = 1 - 24q - 72q^2 - 96q^3 - 168q^4 - \cdots$$

とする. 我々の考える微分方程式は

$$f''(\tau) - \frac{k+1}{6}E_2(\tau)f'(\tau) + \frac{k(k+1)}{12}E_2'(\tau)f(\tau) = 0 \tag{$\sharp$}_k$$

である. この方程式は,「$f(\tau)$ が解なら任意の $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbf{Z})$ に対し $(c\tau+d)^{-k}f\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)$ も解」という性質を持ち, また係数の関数に適当な条件を課せばこのような性質で $(\sharp)_k$ は特徴付けられる ([5], [4] 参照).

[7] で得られた結果は, k を正の偶数で 3 で割って 2 余らないものとするとき, $(\sharp)_k$ は $SL_2(\mathbf{Z})$ に関する重さ k のモジュラー形式の解を持ち, その解 $F_k(\tau)$ は超幾何多項式を使って具体的に与えられ, さらに p を 5 以上の素数とするとき $F_{p-1}(\tau)/\eta(\tau)^{2(p-1)}$ を $\bmod p$ したものが "supersingular j-polynomial"(その根が丁度超特異楕円曲線の j 不変量であるような多項式) を与える ($p-1$ が 12 で割れないときは少々修正が必要) というものである.

また [5] では k が 3 で割って 2 余る偶数や奇数, また半整数の場合を考察して, $(\sharp)_k$ の解としてレベルの小さな合同群のモジュラー形式, また「準モジュラー」形式が現れるこ

とをその具体的な記述によって明らかにした. ([4] にこれらの結果のもう少し詳しいサーベイがある.)

[4] にも書いたが, 上記の結果に関する講演を聞かれた東大の松尾厚さんの示唆に刺激を受けて k が $\frac{1}{5}\mathbf{Z}$ の数のときの解を調べたのが以下に述べる結果である. 改めて松尾さんに感謝したい.

定理 $k=(6n+1)/5,\ n=0,1,2,\ldots,\ n\not\equiv 4 \pmod 5$ とする. このとき $(\sharp)_k$ の解空間は $\mathbf{C}[\phi_1,\phi_2]$ の重さ k の元 (次数が $5k$ の斉次多項式) で張られる.

解空間の基底の例をあげると

$$
\begin{aligned}
k=\tfrac{1}{5}:&\quad \phi_1,\ \phi_2,\\
k=\tfrac{7}{5}:&\quad \phi_1^7+7\phi_1^2\phi_2^5,\ 7\phi_1^5\phi_2^2-\phi_2^7,\\
k=\tfrac{13}{5}:&\quad \phi_1^{13}+39\phi_1^8\phi_2^5-26\phi_1^3\phi_2^{10},\ 26\phi_1^{10}\phi_2^3+39\phi_1^5\phi_2^8-\phi_2^{13},\\
k=\tfrac{19}{5}:&\quad \phi_1^{19}+171\phi_1^{14}\phi_2^5+247\phi_1^9\phi_2^{10}-57\phi_1^4\phi_2^{15},\ 57\phi_1^{15}\phi_2^4+247\phi_1^{10}\phi_2^9-171\phi_1^5\phi_2^{14}+\phi_2^{19}.
\end{aligned}
$$

[7] や [5] で扱った k が整数, 半整数の場合は, モジュラー形式の解はすべて具体的に超幾何多項式を使って書き表された. しかし上記の場合に解の閉じた一般的な公式を見つけることには成功していない. その違いは次のようなことに起因していると考えられる.

今, 上の例に現れる関数を ϕ_1^{5k} で割ると ϕ_2^5/ϕ_1^5 の多項式になっていることに着目して

$$f(\tau)/\phi_1^{5k}=F(t),$$

ここに

$$t=\phi_2^5/\phi_1^5=q-5q^2+15q^3-30q^4+40q^5+\cdots,$$

という変数変換をして, $(\sharp)_k$ を t に関する微分方程式に書き換える. t は合同群 $\Gamma_1(5)$ のいわゆる "Hauptmodul" (の逆数) である. ここではこれを $q=0$ の近傍での局所座標とみて変数変換を行うのである. このとき, $f(\tau)$ が方程式 $(\sharp)_k$ を満たすことと, $F(t)$ が次の $(\flat)_k$ を満たすことが同値となる:

$$(\flat)_k\qquad t(t^2+11t-1)F''(t)+\left(\frac{7-11k}{6}t^2+11(1-k)t+\frac{k-5}{6}\right)F'(t)+\frac{k(5k-1)}{6}(t+3)F(t)=0.$$

ここでの $'$ は t に関する微分である. 一寸脱線するが, ここで $k=-1$ とおいて得られる微分方程式

$$(\flat)_{-1}\qquad t(t^2+11t-1)F''(t)+(3t^2+22t-1)F'(t)+(t+3)F(t)=0$$

は, F. Beukers が [1] において $\zeta(2)$ ($\zeta(3)$ の方ではなく) の無理性の Apéry による証明を再構成したときに用いた微分方程式である. $k=-1$ のとき $(\sharp)_k$ は

$$f''=0$$

という自明な方程式であるが, これの基本解 $1, \tau$ が即ち「普遍周期」であり, この方程式を「モジュラス」t を変数に取り直して書き換えたものの解として, $\Gamma_1(5)$ に対応する楕円曲線の族の周期の満たす微分方程式が出てくる, この微分方程式を Beukers は上手く利用したのである.

それはさておき, これまでの例では, モジュラー関数を変数に取り直した同様の変数変換で得られる $(\flat)_k$ にあたる方程式が Gauss の超幾何微分方程式となり, k が特定の値の時それが多項式解を持ったのである. 対応するモジュラー形式解の属する群はレベルが高々 4 までの三角群である. しかし, 今の場合 $(\flat)_k$ は特異点を 4 点 ($\Gamma_1(5)$ の 4 つの尖点に対応する) 持ち, もはや超幾何ではない.

以下述べるように多項式解は持つのであるが, それがよい閉じた形の表示を持つのかどうか, 今のところ私には分からない. $(\flat)_k$ に多項式の解 $P(t)$ が存在すると,

$$\phi_1^{5k}P(\phi_2^5/\phi_1^5) \quad \text{および} \quad \phi_2^{5k}P(-\phi_1^5/\phi_2^5)$$

が $(\sharp)_k$ の解となる. (第二のものが解であることは, $SL(2,\mathbf{Z})$ が解空間に作用していて, 行列 $\left(\begin{smallmatrix}-3 & -5\\ 5 & 8\end{smallmatrix}\right)$ が $\phi_1\to\phi_2$, $\phi_2\to-\phi_1$ なる作用を引き起こすことによる.)

命題 $0\le n\le 8$, $n\ne 4$ に対し,

$$\begin{aligned}
P_0(t) &= 1,\\
P_1(t) &= 1+7t,\\
P_2(t) &= 1+39t-26t^2,\\
P_3(t) &= 1+171t+247t^2-57t^3,\\
P_5(t) &= 1-465t-10385t^2-2945t^3-8370t^4+682t^5,\\
P_6(t) &= 1-333t-17390t^2-54390t^3+26640t^4-64158t^5+3774t^6,\\
P_7(t) &= 1-301t-36421t^2-310245t^3+10535t^4-422303t^5+283843t^6-12857t^7,\\
P_8(t) &= 1-294t-101528t^2-1798692t^3-2747430t^4-387933t^5-2086028t^6\\
&\quad +740544t^7-26999t^8.
\end{aligned}$$

とおき, $n \geq 10$, $n \not\equiv 4 \pmod 5$ なる n に対し, 多項式 $P_n(t)$ を漸化的に

$$\begin{aligned}P_n(t) &= (1+t^2)(1-522t-10006t^2+522t^3+t^4)P_{n-5}(t) \\ &\quad +12\frac{(6n-29)(6n-49)}{(n-4)(n-9)}t(1-11t-t^2)^5 P_{n-10}(t)\end{aligned}$$

で定義する. このとき $P_n(t)$ は任意の $n \geq 0$, $n \not\equiv 4 \pmod 5$ について $(\flat)_{(6n+1)/5}$ の解である.

証明は $(\sharp)_k$ の解が $k \bmod 6$ に関する帰納的構造を持っていることを使った帰納法による. [5] において k が $\equiv 5 \bmod 6$ の場合の準モジュラー形式解について論じたところの論法を用いるのだが省略する. この解の記述はスマートとはとても言い難いが, 非自明な多項式解を持つ系列として何か意味があるのかもしれない.

この多項式の mod p を計算してみると, やはり超特異楕円曲線と結び付くようである. 最後にそれを予想として述べて置く. まず楕円モジュラー関数 $j(\tau) = E_4(\tau)^3/\Delta(\tau)$ と $t = t(\tau)$ の関係式

$$j(\tau) = \frac{(1+228t(\tau)+494t(\tau)^2-228t(\tau)^3+t(\tau)^4)^3}{t(\tau)(1-11t(\tau)-t(\tau)^2)^5}$$

から, t の値に対応する j の値を

$$j(t) = \frac{(1+228t+494t^2-228t^3+t^4)^3}{t(1-11t-t^2)^5}$$

とする. ちなみに言うと, この分母が先の $P_n(t)$ の漸化式の右辺に見えているがそれは $\Delta(\tau) = \eta(\tau)^{24}$ に由来し, また漸化式の $1-522t-10006t^2+\cdots$ は Eisenstein 級数 $E_6(\tau)$ に由来する.

さて素数 p に対し, $ss_p^{(5)}(t)$ で "supersingular t-polynomial", すなわち

$$ss_p^{(5)}(t) = \prod_{t_0 \in \bar{\mathbb{F}}_p} (t-t_0),$$

ここで t_0 は対応する楕円曲線が supersingular, つまり $j(t_0)$ が supersingular な楕円曲線の j-不変量であるような値をわたる, とする. このとき,

予想

(i) $p \neq 5$ を素数とする. このとき

$$P_{p-1}(t) \bmod p = ss_p^{(5)}(t)$$

であろう.

(ii) $p \geq 7$ に対し, $P_{p-1}(t) \bmod p$ の既約分解は次のようであろう.

- $p \equiv 1 \bmod 5$ のとき, 全ての既約因子は 2 次である.
- $p \equiv 3, 7 \bmod 20$ のとき, 2 次の既約因子が一つあり, 残りは 4 次である.
- $p \equiv 13, 17 \bmod 20$ のとき, 全ての既約因子は 4 次である.
- $p \equiv 4 \bmod 5$ のとき, h 個の 1 次因子と $(p-1-h)/2$ 個の 2 次因子を持つ. ここに h は $p \equiv 1 \bmod 4$, $p \equiv 3 \bmod 8$ または $p \equiv 7 \bmod 8$ に応じて $\mathbf{Q}(\sqrt{-p})$ の類数の 2 倍, 8 倍または 4 倍である.

超特異多項式のこういう分解の次数に虚 2 次体の類数が現れることは j-多項式の場合に Deuring, Eichler によって知られている. 上の場合は類数が関与しない規則的な分解が多く現れている. 具体的な例は表にして [4] に載せた. そもそもこの報告の記述は [4] におけるそれと多く重複している. 併せ眺めていただければ幸いである.

参考文献

[1] F. Beukers, Irrationality of π^2, periods of an elliptic curve and $\Gamma_1(5)$, "Approximations Diophantiennes et Nombres Transcendants," Progress in Math., **31**, Birkhäuser, (1983), 47–66.

[2] G. H. Hardy, Ramanujan, Chelsea Publishing Company, New York 1959.

[3] T. Ibukiyama, Modular forms of rational weights and modular varieties, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, **70** (2000), 315–339.

[4] M. Kaneko, いくつかのモジュラー形式の零点をめぐって および ある微分方程式のモジュラー形式解について, 第 2 回保型形式周辺分野スプリングコンファレンス (2003. 2. 15–2. 19) 報告集.

[5] M. Kaneko and M. Koike, On modular forms arising from a differential equation of hypergeometric type, The Ramanujan J., vol. 7, 145–164, (2003).

[6] M. Kaneko and M. Koike, Quasimodular forms as solutions to a differential equation of hypergeometric type, Galois Theory and Modular Forms, (ed. K. Hashimoto, K. Miyake and H. Nakamura), Kluwer Academic Publishers, 329–336, (2003).

[7] M. Kaneko and D. Zagier, Supersingular j-invariants, hypergeometric series, and Atkin's orthogonal polynomials, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, vol. 7 (1998), 97–126.